PART4　三角形の面積

例題

次のような $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

(1)　$a=6$，$b=5$，$C=30°$

(2)　$a=2\sqrt{7}$，$b=4$，$c=2$

(3)　$a=7$，$b=11$，$c=6$

Point Pickup

練習

次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$a=2\sqrt{2}$，$c=3$，$B=45^\circ$

(2)　$a=5$，$b=3$，$c=7$

(3)　$a=8$，$b=6$，$c=4$

第 11 講　PART4　確認問題

1　△ABC において，$a=2$，$c=5\sqrt{2}$，$B=45^\circ$ のとき，面積 S を求めよ。

$S=$ ア

2　△ABC において，$a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$ のとき，面積 S を求めよ。

$S=\dfrac{\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$

3　△ABC において，$a=7$，$b=5$，$c=4$ のとき，面積 S を求めよ。

$S=\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$

PART4　三角形の面積

例題

次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$a=6$，$b=5$，$C=30^\circ$

(2)　$a=2\sqrt{7}$，$b=4$，$c=2$

(3)　$a=7$，$b=11$，$c=6$

(1)　$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot \sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot \dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2}$

(2)　余弦定理より $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4^2+2^2-(2\sqrt{7})^2}{2\cdot 4\cdot 2}=\dfrac{-8}{2\cdot 4\cdot 2}=-\dfrac{1}{2}$

$A=120^\circ$

よって $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot \sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

(3)　余弦定理より $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{6^2+7^2-11^2}{2\cdot 6\cdot 7}=\dfrac{-36}{2\cdot 6\cdot 7}=-\dfrac{3}{7}$

$\sin^2 B=1-\cos^2 B=1-\left(-\dfrac{3}{7}\right)^2=\dfrac{40}{49}$　　$\sin B>0$ より $\sin B=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

よって $S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot \dfrac{2\sqrt{10}}{7}=6\sqrt{10}$

練習

次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$a=2\sqrt{2}$，$c=3$，$B=45^\circ$

(2)　$a=5$，$b=3$，$c=7$

(3)　$a=8$，$b=6$，$c=4$

(1)　$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3$

(2)　余弦定理より $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 3}=\dfrac{-15}{2\cdot 5\cdot 3}=-\dfrac{1}{2}$　　$C=120^\circ$

よって $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

(3)　余弦定理より $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{6^2+4^2-8^2}{2\cdot 6\cdot 4}=\dfrac{-12}{2\cdot 6\cdot 4}=-\dfrac{1}{4}$

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{15}{16}$　　$\sin A>0$ より $\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$

第11講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：5

[解説]

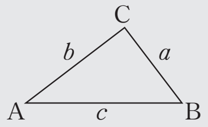
$$S=\frac{1}{2}ca\sin B \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 2\cdot \sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 2\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=5$$

［A］　三角形の面積



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$

2

[正解] イ：3，ウ：4

[解説]

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3})^2+1^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}$$

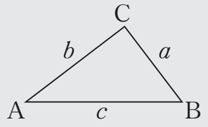
$$=\frac{3+1-7}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{-3}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A=150^\circ$$

よって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ [B]

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

［B］　三角形の面積



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$

3 **[正解]** エ：4，オ：6

[解説]

余弦定理より

$$\cos A=\frac{5^2+4^2-7^2}{2\cdot5\cdot4}$$

$$=\frac{25+16-49}{2\cdot5\cdot4}=\frac{-8}{2\cdot5\cdot4}=-\frac{1}{5}$$

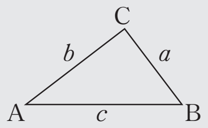
$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{24}{25}$$

$\sin A>0$ より　$\sin A=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ [C]

$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}$$

［C］　三角形の面積



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$
$$=\frac{1}{2}ca\sin B$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$